

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 8. 02. 2026

Clasa a IX - a

**Problema 1.** a) Arătați că pentru orice numere reale  $a, b$  și  $c$ ,  $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$ .

b) Fie  $a, b, c$  numere reale pozitive cu suma 3. Arătați că:

$$\frac{a}{2b+3} + \frac{b}{2c+3} + \frac{c}{2a+3} \geq \frac{3}{5}.$$

**Problema 2.** Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $E \in (AB)$  și  $F \in (AC)$ , astfel încât  $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{3}$  și

$\frac{FC}{FA} = \frac{1}{4}$ . Dreapta  $EF$  intersectează mediana  $AD$  ( $D \in (BC)$ ) în punctul  $G$ . Arătați că  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ .

**Problema 3.** Rezolvați ecuația  $\left[ \frac{x-3}{2} \right] = \left[ \frac{x-2}{3} \right]$ .

**Notă.**  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

**Problema 4.** Arătați că  $\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k^3} \right) < 3$ , pentru orice număr natural  $n \geq 1$ .

---

*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore*

*Toate problemele sunt obligatorii*

*Fiecare problemă se punctează de la 0 la 22.5 puncte și se acordă 10 puncte din oficiu*

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a X - a

**Problema 1.** Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , astfel ca  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ .

a) Dacă  $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ , calculați  $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ ;

b) Dacă  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$  și  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ , determinați  $|z_1 + z_2 + z_3|$ .

**Problema 2.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

a) Arătați că funcția  $f$  nu este nici injectivă și nici surjectivă;

b) Calculați  $f\left(\frac{1}{2026}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2025}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) \cdot \frac{1}{f(2)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{f(2026)}$ .

**Problema 3.** Arătați că, dacă numerele reale pozitive  $x, y$  și  $z$ , distincte două câte două, satisfac relația

$$\frac{\lg x}{y-z} = \frac{\lg y}{z-x} = \frac{\lg z}{x-y}, \text{ atunci } x^x y^y z^z = 1.$$

**Problema 4.** Determinați funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $f(0) \neq -1$  și care verifică relația

$$f\left(x \cdot f(y) + f(x+y)\right) = y \cdot \left(f(x) + 1\right) + f(x),$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

---

*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore*

*Toate problemele sunt obligatorii*

*Fiecare problemă se punctează de la 0 la 22.5 puncte și se acordă 10 puncte din oficiu*

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a XI - a

**Problema 1.** Fie matricele  $C = \begin{pmatrix} 2025 & 1 \\ 2026 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ , astfel încât  $AB = C$ . Demonstrați că  $BA - (BA)^{-1} = 2026 \cdot I_2$ .

**Problema 2.** Presupunând că limita  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$  există și este finită, calculați valoarea acesteia folosind schimbarea de variabilă  $x = 3t$ .

**Problema 3.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Arătați că urma matricei  $A^n$  este  $1 + 2^n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Problema 4.** Calculați limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( n\pi \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} \right)$ .

---

*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore*

*Toate problemele sunt obligatorii*

*Fiecare problemă se punctează de la 0 la 22.5 puncte și se acordă 10 puncte din oficiu*

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a XII - a

**Problema 1.** Să se calculeze:

a)  $\int \frac{dx}{x \cdot \left( 1 + x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x \cdot \dots \sqrt[2026]{x}}}} \right)}, \quad x \in (0, +\infty);$

b)  $\int \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 1}$  și  $\int \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1} dx, \quad x \in (0, +\infty).$

**Problema 2.** Fie  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care admite primitive și care verifică relația:

$$f(x) \cdot \sin x - f(\pi - x) = \cos^2 x, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Să se determine funcția  $f$  și primitivele ei.**Problema 3.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $H$  o submulțime proprie a lui  $G$  ( $H \neq \emptyset, H \neq G$ ), cu proprietatea că pentru orice elemente  $x \in H$  și  $y \in G - H$ , avem  $x \cdot y \in G - H$ . Să se arate că  $H$  este un subgrup al lui  $G$ .**Problema 4.** Pe mulțimea  $G = [0, 1)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \{x + y\}$ .a) Să se arate că  $(G, *)$  este un grup abelian;b) Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , grupul  $(G, *)$  are un subgrup izomorf cu  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .**Notă.**  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $a$ .

---

*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore**Toate problemele sunt obligatorii**Fiecare problemă se punctează de la 0 la 22.5 puncte și se acordă 10 puncte din oficiu*